CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Obras que integran el bloque 7 (*Cálculo diferencial*):

Módulo I
Introducción al Cálculo diferencial

Módulo 2
Límite de una función

Módulo 3
Continuidad de una función

Módulo 4
Derivación de funciones algebráicas

Módulo 5
Derivación de funciones trascendentes

Módulo 6
Extremos de una función
(máximos y mínimos)

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior

Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

Bloque 7

Cálculo diferencial

Módulo 3

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España,
Puerto Rico, Venezuela

La presentación y disposición en conjunto de
CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, enero 1985
ISBN 968-24-1428-8

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 Continuidad de una función en un número 9

3.2 Continuidad de una función en un intervalo abierto 24

3.3 Continuidad de una función en un intervalo cerrado 39

3.4 Discontinuidad removible y discontinuidad esencial 53

3.5 Operaciones con funciones 61

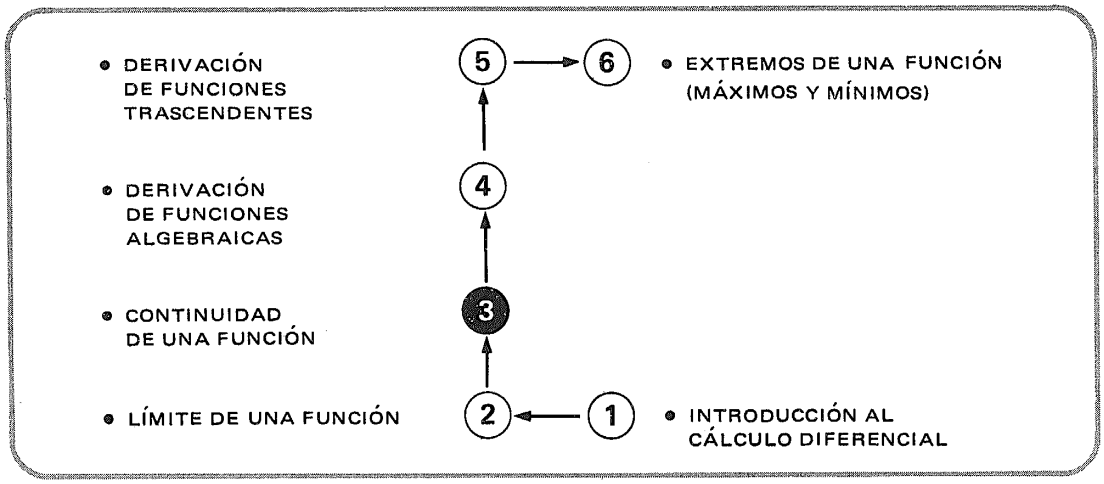
3.6 Continuidad de una función suma, diferencia, producto, cociente o composición 83

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 7. Cálculo diferencial

Objetivos: derivar funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los conocimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 7



Módulo 3. Continuidad de una función

Objetivos: proporcionar las condiciones de continuidad de una función

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Relación y función (concepto, elementos, clasificación y representación gráfica)	2	7, 8
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
• Conceptos trigonométricos básicos	5	1
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Límite de una función (concepto y manejo)	7	2

3.1

Continuidad de una función en un número.

1

Hemos visto que una **función** es **continua*** si su gráfica **no** presenta **saltos**, es decir, que puede ser trazada sin levantar el lápiz del papel.

* Véase módulo 2 de cálculo diferencial.

2

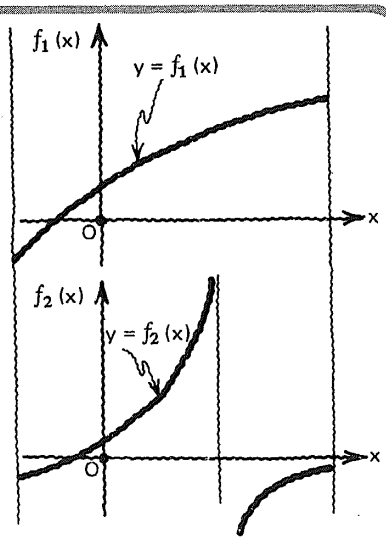
De acuerdo con esto, la función f_1

es [ ]

y la función f_2

es [ ]

en el intervalo mostrado.



continua

discontinua

3

Vamos, ahora, a **formalizar** este **estudio** de la **continuidad de una función** en un intervalo determinado.

4

Empezaremos **definiendo** en términos precisos lo que deberemos entender por **continuidad de una función para un cierto número**, o **continuidad de una función en un número.**

5

Estudiar con atención.

Diremos que una **función** definida por $y = f(x)$ es **continua para** $x = a$ si y sólo si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Si al menos una de estas condiciones no se cumple, la función es discontinua para $x = a$.

6

Investiguemos si
la función definida por $f(x) = 3x - 1$
es continua para $x = 2$.

En primer lugar,
determinaremos para qué valores de $x \in \mathbb{R}$
la función f está definida.

Podemos ver que f está definida para [ ]

porque [ ]

- toda $x \in \mathbb{R}$
  o
  en el intervalo $(-\infty, +\infty)$
- si $x \in \mathbb{R}$ entonces $3x \in \mathbb{R}$
  si $3x \in \mathbb{R}$ entonces $3x - 1 \in \mathbb{R}$

  (cerradura de la multiplicación y de la adición en $\mathbb{R}$)

7

$$f(x) = 3x - 1$$

Si f está definida para toda x,
está definida para $x = 2$.

En efecto:

$$f(2) = [\quad]$$

5

8

$$f(x) = 3x - 1$$

Se verifica la condición 1:

$f(2)$ existe.

9

$f(x) = 3x - 1$

1. $f(2)$ existe

Investiguemos si existe $\lim_{x \to 2} f(x)$

$\lim_{x \to 2} (3x - 1) =$ [ ]

$3(2) - 1 = 5$ por TL 3

10

$f(x) = 3x - 1$

1. $f(2)$ existe

2. $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe

La condición 3 pide que:

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

lo cual **se verifica/no se verifica,**

puesto que [ ]

- se verifica

$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$

$f(2) = 5$

$\Big\}$ $5 = 5$

11

$f(x) = 3x - 1$

Como se verifican las 3 condiciones

1. $f(2)$ existe
2. $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

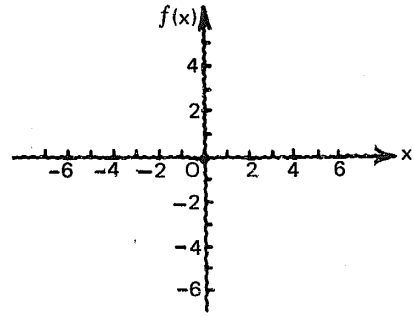
concluimos que: [ ]

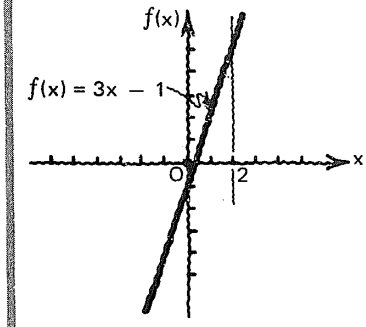
la función f es continua para $x = 2$.

12

Representación gráfica de la función

$f(x) = 3x - 1$





la gráfica de f "no da salto" para $x = 2$.

13

Tenemos, ahora, la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

que deseamos saber si es continua para $x = 1$.

14

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

La función f está definida para [_____]

toda $x \in \mathcal{R}$

o bien,

su dominio es el intervalo [_____]

$(-\infty, +\infty)$

15

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Se verifica/no se verifica la condición 1.

Es decir: [ ]

se verifica

$f(1)$ existe

16

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. $f(1)$ existe

Se verifica/no se verifica la condición 2.

Es decir: [ ]

se verifica

$\lim_{x \to 1} (-5x + 2)$ existe

17

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. $f(1)$ existe
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe

Se verifica/no se verifica la condición 3.

Es decir: [ ]

porque [ ]

- no se verifica
- $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$
- $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$, $f(1) = 0$ $\Big\}$ $-3 \neq 0$

18

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

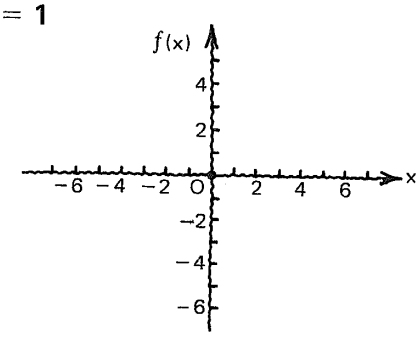
1. $f(1)$ existe
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$

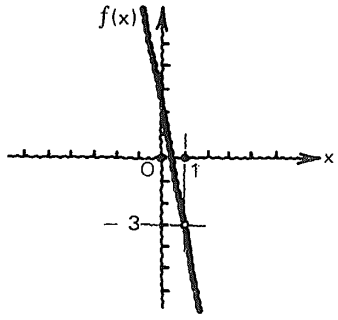
Conclusión: f no es continua para $x = 1$
o
f es discontinua para $x = 1$

19

Representación gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} -5x + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$





La gráfica de f tiene un salto en $x = 1$ aunque esté definida para $x = 1$.

20

Se requiere investigar si la función definida así:

$$f(x) = x + 4 \quad \text{si } x \neq 3$$

es continua o discontinua para $x = 3$.

21

$f(x) = x + 4 \quad$ si $x \neq 3$

El dominio de f es: [_____]

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 3\}$

o en forma de intervalo:

$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

22

$f(x) = x + 4 \quad$ si $x \neq 3$

Se verifica/no se verifica la condición 1.

Es decir: [_____]

no se verifica

$f(3)$ no existe

23

$f(x) = x + 4 \quad$ si $x \neq 3$

1. $f(3)$ no existe

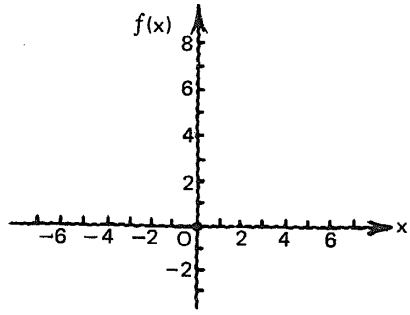
Conclusión: [_____]

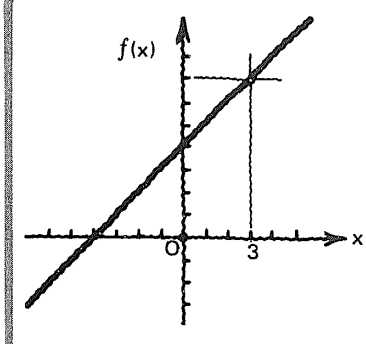
f es discontinua para $x = 3$

24

Representación gráfica de

$f(x) = x + 4 \quad \text{si } x \neq 3$





La gráfica de f presenta un salto en $x = 3$, y no está definida en $x = 3$.

25

Sea la función definida así:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Investiguemos sus condiciones de continuidad para $x = 2$.

26

Atención.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

El dominio de f es: [ ]

$\mathbb{R}$

o el intervalo $(-\infty, +\infty)$

27

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Se verifica/no se verifica la condición 1.

Es decir [_____]

se verifica

$f(2)$ existe

28

☞ Atención.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. $f(2)$ existe.

Se verifica/no se verifica la condición 2.

Es decir: [_____]

porque [_____]

- se verifica
  $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe
- Estando f definida de diferente manera a la izquierda y a la derecha de 2, calculamos:

  $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

  como

  $\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x}{2} + 2\right) = 3$

  y $\lim_{x \to 2^+} (5 - x) = 3$

  entonces

  $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. $f(2)$ existe
2. $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe

Se verifica/no se verifica la condición 3.

Es decir: [_____]

porque [_____]

- se verifica
- $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$
- $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

  y

- $f(2) = \frac{(2)}{2} + 2 = 1 + 2 = 3$

} $3 = 3$

30

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1. $f(2)$ existe
2. $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

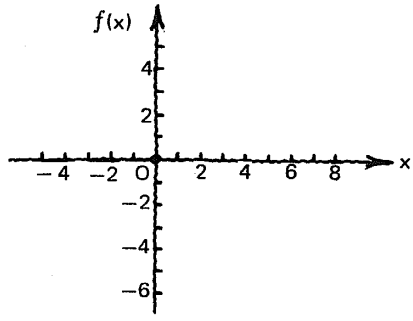
Conclusión: [ ]

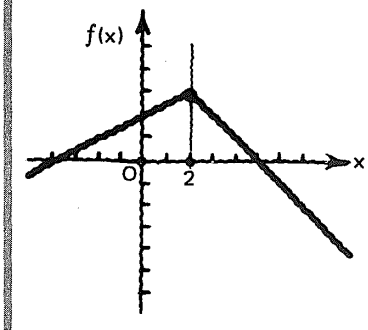
f es continua para $x = 2$

31

Representación gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 5 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$





La gráfica de f no da salto en $x = 2$.

32

Se quiere saber si la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

es continua o discontinua para $x = 0$

33

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dominio de f = [ ]

$\mathbb{R}$
o
$(-\infty, +\infty)$

34

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se verifica/no se verifica que $f(0)$ existe.

se verifica

35

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. $f(0)$ existe

Se verifica/no se verifica que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe

porque [ ]

- no se verifica

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = 5 \end{array}\right\} 2 \neq 5$$

por lo tanto:

$\lim_{x \to 0} f(x)$ no está definido

36

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. $f(0)$ existe
2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe

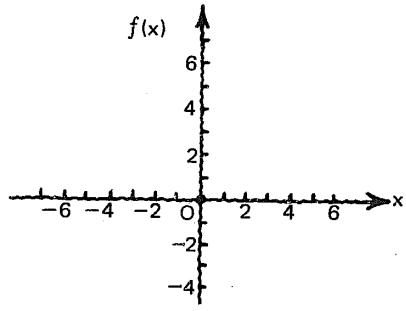
Conclusión: _____

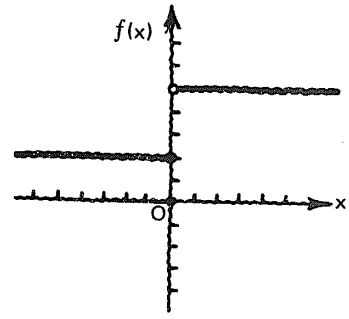
f es discontinua para $x = 0$

37

Representación gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$





Hay un salto en la gráfica de f en $x = 0$.

38

Queremos saber si la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es o no continua para $x = 0$.

39

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Dominio de f = [ ]

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\}$

40

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Se verifica/no se verifica que $f(0)$ existe

no se verifica

41

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1. $f(0)$ no existe

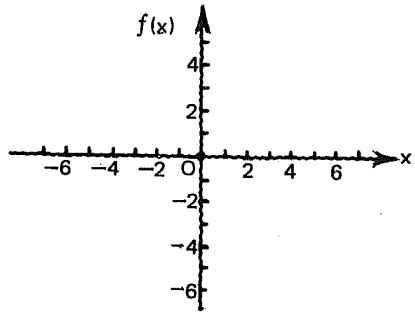
Conclusión: [ ]

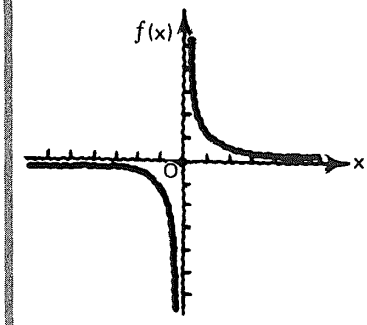
f es discontinua para $x = 0$

42

Representación gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$





La gráfica de f presenta un salto para $x = 0$.

7.3.1.1

Práctica adicional
si se considera necesario.

7.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si una función definida por $y = f(x)$ es o no continua para un número a, mediante la verificación de las 3 condiciones siguientes:

  1. $f(a)$ existe
  2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
  3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

3.2

Continuidad de una función en un intervalo abierto

43

Existen algunas funciones
que son continuas
para cualquier número real.

44

Por ejemplo:

la **función constante** definida por $f(x) = 3$

¿es continua para cualquier valor de x?

Sí/No

Sí

45

$f(x) = 3$

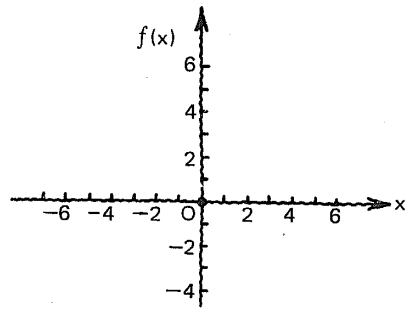
Podemos ver que:

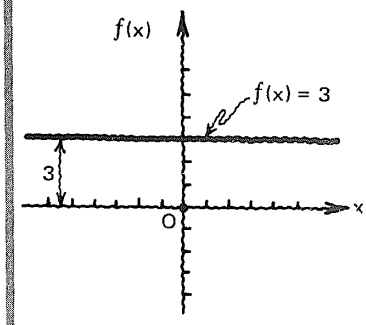
para cualquier $x = a$ se cumple que

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

46

Representación gráfica de $f(x) = 3$.





La gráfica de f no presenta salto para ningún valor de x.

47

La **función identidad** definida por $f(x) = x$

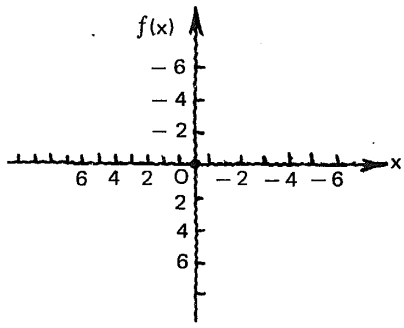
¿es continua para cualquier valor de x?

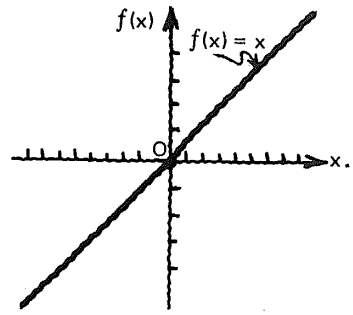
Sí/No

Sí

48

Gráficamente.





No hay saltos para ninguna x.

49

La **función lineal** definida por $f(x) = \frac{3x}{4} + 1$

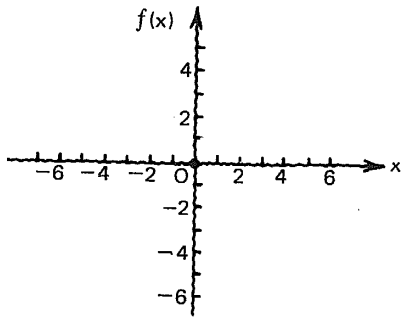
¿es continua para cualquier valor de x?

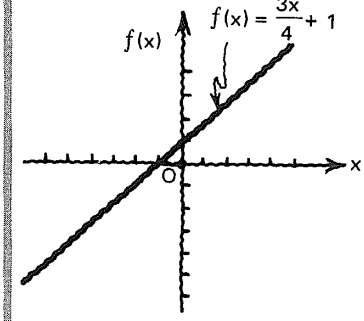
Sí/No

Sí

50

Gráficamente.





No se presentan discontinuidades para ningún valor de x.

51

La **función cuadrática** definida por

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

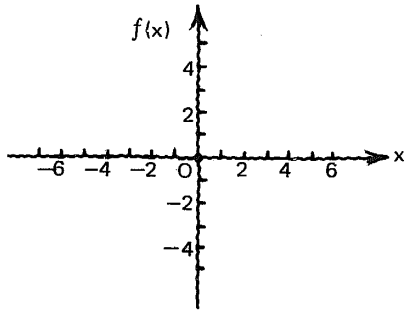
¿es continua para cualquier valor de x?

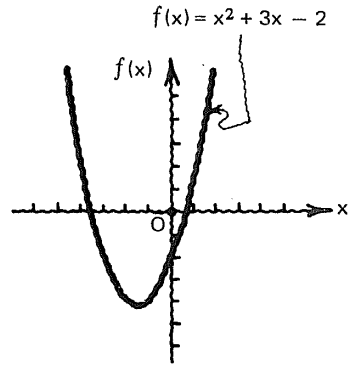
Sí/No

Sí

52

Gráficamente.





53

La **función cúbica** definida por

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

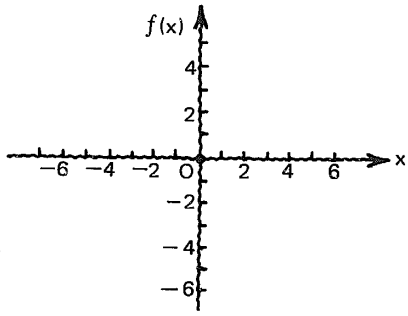
¿es continua para toda x?

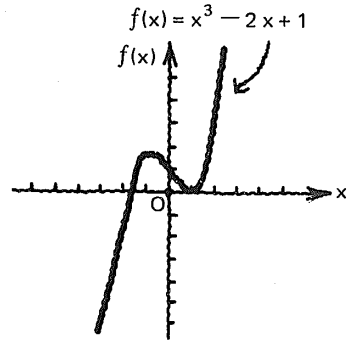
Sí/No

Sí

54

Gráficamente.





55

Cualquier **función polinomial** definida por

$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_0$

con coeficientes reales y exponentes enteros no negativos

¿es continua para todos los valores de x?

Sí/No

Sí.

Obsérvese que un polinomio es una suma de productos.

Para determinar $f(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x)$ para cualquier **a** es necesario efectuar operaciones de suma y multiplicación, que son cerradas en $\mathcal{R}$.

Por lo tanto, $f(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x)$ son números reales para toda a.

Se verifica para $x = a$ $(a \in \mathcal{R})$:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

} por los teoremas de límites estudiados.

56

Sin efectuar una demostración rigurosa, aceptaremos el siguiente teorema.

Teorema C_1. Continuidad de la función polinomial.

Toda función polinomial es continua para cualquier número real.

57

Vamos a investigar si

la **función racional*** definida por:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

es continua para todos los valores de x.

* Recordemos que la regla de correspondencia de una función racional tiene la forma: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ en que $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios en x.

58

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

Empezaremos por determinar:

dominio de f = [ ]

Sabemos que una expresión como

$\frac{x+2}{x^2+4}$

no se define cuando el denominador es nulo.

Pero, en este caso el denominador es no nulo para cualquier valor de x.

Por lo tanto, el dominio de la función es

$\mathcal{R}$

o

$(-\infty, +\infty)$

59

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

Se verifica/no se verifica que $f(a)$ existe $\forall$ a $\in \mathcal{R}$.

se verifica

60

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

1. $f(a)$ existe $\forall\ a \in \mathbb{R}$

Se verifica/no se verifica que $\lim_{x \to a} \frac{x + 2}{x^2 + 4}$ existe $\forall\ a \in \mathbb{R}$

porque

- se verifica
- Para toda $a \in \mathbb{R}$ y por lo que sabemos acerca de límites:

$\lim_{x \to a} (x + 2)$ existe y es igual $a(a + 2)$

$\lim_{x \to a} (x^2 + 4)$ existe, es igual a $(a^2 + 4)$

y es no nulo

$\lim_{x \to a} \frac{x+2}{x^2+4}$ existe y es igual a $\frac{a+2}{a^2+4}$

por TL7

61

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

1. $f(a)$ existe $\forall\ a \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe $\forall\ a \in \mathbb{R}$

Se verifica/no se verifica que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\ \forall\ a \in \mathbb{R}$

porque

- se verifica
- $\lim_{x \to a} f(x) = \frac{a + 2}{a^2 + 4}$
- y
- $f(a) = \frac{a + 2}{a^2 + 4}$

62

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4}$$

$\forall\ a \in \mathbb{R}$

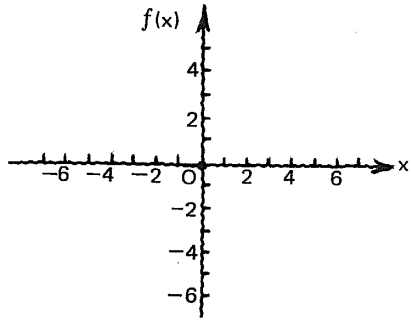
1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

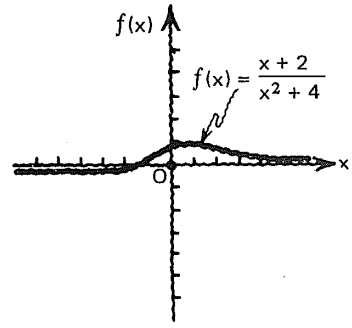
Conclusión:

f es continua $\forall\ a \in \mathbb{R}$

63

Gráficamente.





64

Investiguemos si la **función racional** definida por

$$f(x) = \frac{3x}{x - 2}$$

es continua para toda $x \in \mathbb{R}$.

65

$$f(x) = \frac{3x}{x - 2}$$

Dominio de $f =$ _____

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 2\}$

o

$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

66

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

Se verifica que
1. $f(a)$ existe para [ ]

$a \neq 2$

67

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

1. $f(a)$ existe para toda $a \neq 2$

Se verifica la condición 2 para [ ]

Es decir: [ ]

- toda a, con excepción de a = 2.
- $\lim_{x \to a} \frac{3x}{x-2}$ existe y es igual a $\frac{3a}{a-2}$ siempre que $a \neq 2$, de acuerdo con TL7.

  Si a = 2

  $\lim_{x \to a} \frac{3x}{x-2} = \infty$

  de acuerdo con TL 13, lo que equivale a decir que "no existe límite".

68

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

1. $f(a)$ existe para toda $a \neq 2$
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para toda $a \neq 2$

Además:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

se verifica para: [ ]

toda $a \neq 2$

69

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$

Para toda a, con excepción de a = 2:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Conclusión:

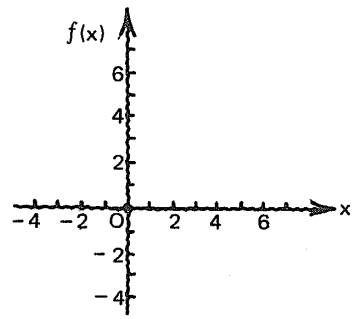
- f es continua para cualquier valor de a, con excepción de a = 2.

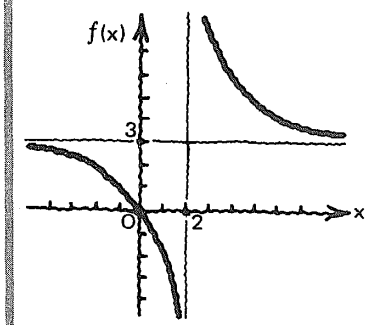
  En otras palabras:

  f es continua para cualquier a perteneciente a su dominio.

70

Gráficamente.





la gráfica de f presenta un salto para x = 2, pero es continua para cualquier otro valor de a.

71

Es posible demostrar el:

Teorema C_2. Continuidad de la función racional.

Toda función racional es continua para cualquier número de su dominio.

72

De acuerdo con el teorema C_2,
la función racional definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

es continua para

└──────────┘

- toda x,
  con excepción de $x = 1$
  y $x = -1$
  o bien para:
  $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

73

La función racional:

$$f(x) = \frac{3x - 2}{5 - 2x}$$

es continua para └──────────┘

porque: └──────────┘

- cualquier valor de x,
  con excepción de $x = \frac{5}{2}$
  o bien en:
  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
- f no está definida para:
  $5 - 2x = 0$ ó $x = \frac{5}{2}$

74

La función racional:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

es continua para └──────────┘

porque: └──────────┘

- cualquier $x \in \mathbb{R}$,
  con excepción de $x = 1$
  o bien en:
  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- f no está definida para:
  $x^2 - 2x + 1 = 0$
  ó
  $x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$

7.3.2.1

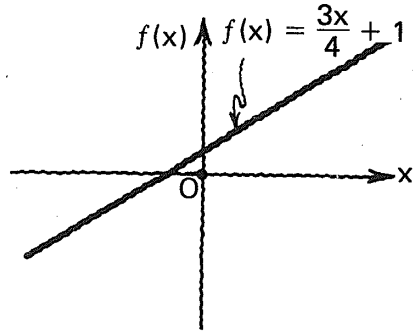
Práctica adicional de
determinación de los números
para los que una función racional dada
es continua,
si se considera necesario.

75

En un ejercicio anterior,
hemos encontrado que
la función lineal
definida por

$$f(x) = \frac{3x}{4} + 1$$

y cuya gráfica se muestra
es continua para
cualquier valor de $x \in \mathcal{R}$.



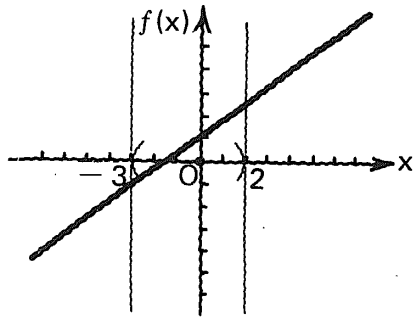
76

Dicho en otras palabras:

la función f
es continua en el
intervalo (− ∞,+ ∞).

Ahora bien,
¿es la función f
continua en el
intervalo $(-3, 2)$?

Sí/No



Sí

77

¿Es f continua
en el intervalo (0, 5)?

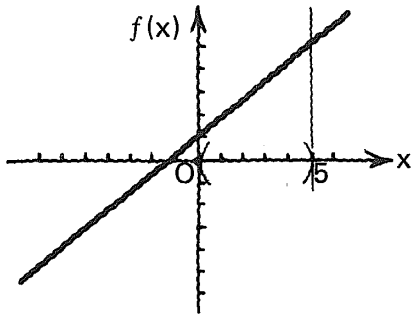
Sí/No

¿en el intervalo
$(-\infty, -2)$?

Sí/No

¿en el intervalo
$(100, +\infty)$

Sí/No



Sí

Sí

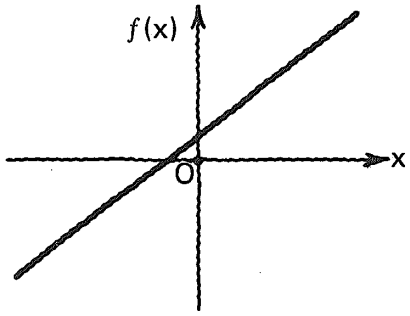
Sí

78

¿Podemos decir que
f es continua
en cualquier intervalo
abierto I
tal que

$I \subseteq (-\infty, +\infty)$?

Sí/No



Sí

79

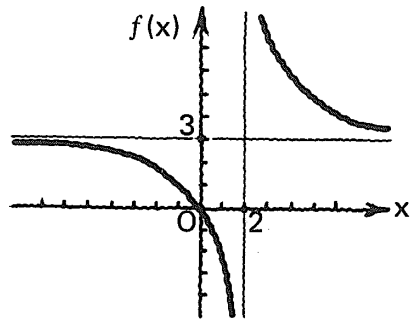
Vamos a establecer que:

Una función definida por $y = f(x)$
es continua en un intervalo
abierto (a, b) si y sólo si
es continua para toda $x \in (a, b)$.

80

La función racional definida por

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$



es continua para cualquier valor de x, con excepción de $x = 2$, como lo habíamos visto antes.

Entonces:

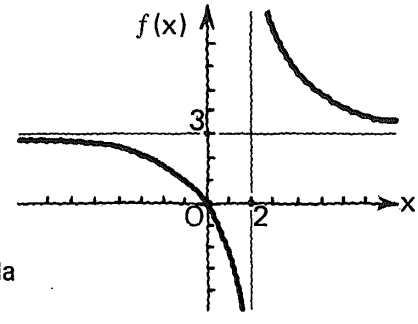
1.	f es continua en $(-\infty, 2)$	V/F
2.	f es continua en $(-\infty, 0)$	V/F
3.	f es continua en $(0, +\infty)$	V/F
4.	f es continua en $(2, +\infty)$	V/F
5.	f es continua en $(0, 2)$	V/F
6.	f es continua en $(1, 4)$	V/F

1. V
2. V
3. F
4. V
5. V
6. F

81

Mucha atención.

$$f(x) = \frac{3x}{x-2}$$



Aunque no hemos dicho nada de la continuidad de una función en un intervalo cerrado intentemos señalar intuitivamente las opciones correctas en el cuadro siguiente.

82

1. f es continua en $(-\infty, 2]$ V/F
2. f es continua en $(-\infty, 0]$ V/F
3. f es continua en $[0, +\infty)$ V/F
4. f es continua en $[2, +\infty)$ V/F
5. f es continua en $[0, 2]$ V/F
6. f es continua en $[0, 4]$ V/F

1. F
2. V
3. F
4. F
5. F
6. F

7.3.2.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* por qué una función polinomial es continua en todo número;
- *determinar* los números para los que una función racional dada es continua;
- *dar* la definición de función continua en un intervalo abierto;
- *señalar* si una función dada es o no continua en un intervalo abierto dado.

3.3

Continuidad de una función en un intervalo cerrado

83

Queremos conocer las condiciones de continuidad de la función definida por

$$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

empezando por determinar el

dominio de f = [_____]

Respuesta en el cuadro siguiente

$\sqrt{16 - x^2}$ está definida si y sólo si $16 - x^2 \geqslant 0$.

Resolviendo esta desigualdad para x:

$$16 - x^2 \geqslant 0$$

$$(4 + x)(4 - x) \geqslant 0$$

$4 + x \geqslant 0$	$4 + x \leqslant 0$
$x \geqslant -4$	$x \leqslant -4$
$4 - x \geqslant 0$	$4 - x \leqslant 0$
$-x \geqslant -4$	$-x \leqslant -4$
$x \leqslant 4$	$x \geqslant 4$

$S_1 = [-4, 4]$ $S = S_1 \cup S_2 = [-4, 4]$ $S_2 = [\ ]$

dominio de f: $\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -4 \leqslant x \leqslant 4\}$ ó $[-4, 4]$

84

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

Dominio de $f = [-4, 4]$

Ahora bien:

¿es f continua en $x = 3$? **Sí/No**

porque

- Sí
- $f(3)$ existe puesto que $3 \in [-4, 4]$

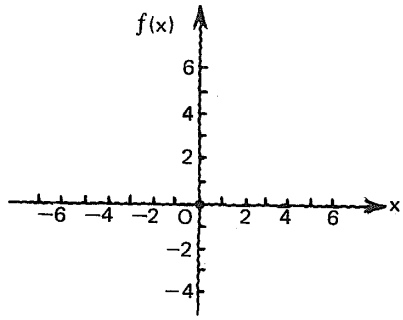
  $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe por TL8

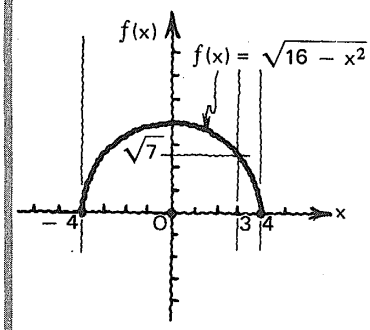
  dado que $\sqrt{\lim_{x \to 3} (16 - x)^2} \in \mathbb{R}$

  $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = \sqrt{7}$

85

Gráficamente.





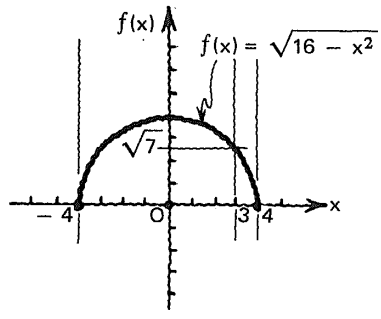
podemos ver que, no hay salto en la gráfica de f para $x = 3$.

86

¿Es f continua en $x = 4$?

Sí/No

porque



- No
- $f(4)$ existe, puesto que $4 \in [-4, 4]$

  pero

  $\lim_{x \to 4} f(x)$ no existe

  dado que

  $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ existe

  pero

  $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ no existe porque

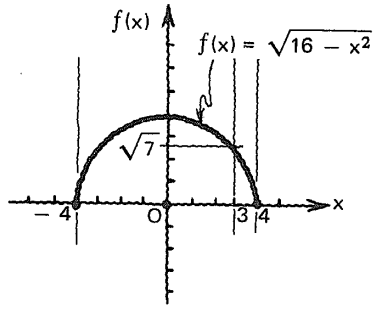
  f no está definida para $x > 4$

87

¿Es f continua en $x = -4$?

Sí/No

porque



- No.
- $f(-4)$ existe, puesto que $-4 \in [-4,4]$

pero

$\lim_{x \to -4} f(x)$ no existe

dado que

$\lim_{x \to -4^+} f(x)$ existe

pero

$\lim_{x \to -4^-} f(x)$ no existe, porque f no está definida para $x < -4$

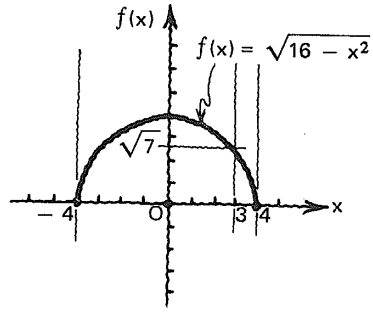
88

Esto nos lleva a definir una

continuidad unilateral

así como hemos definido unos

límites unilaterales.



89

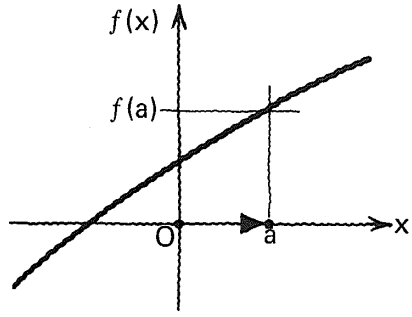
Diremos que:

una función f
es **continua**
por la izquierda *de a,*

si y sólo si

se verifican
las 3 condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe
2. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$



90

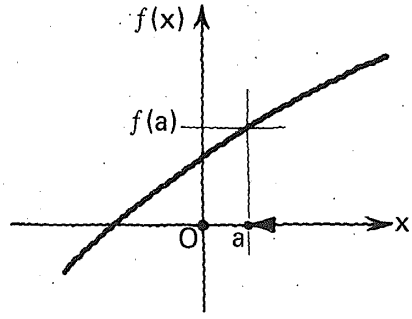
De manera similar:

una **función** f
es **continua**
por la derecha *de a,*

si y sólo si

se verifican las tres condiciones siguientes:

1. ____
2. ____
3. ____



$f(a)$ existe

$\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

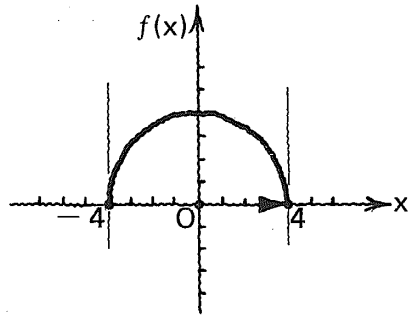
91

De acuerdo con lo anterior, la función definida por

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
y cuya gráfica se muestra,
es/no es continua
por la izquierda de 4,

porque

____



- es
- se verifican las tres condiciones siguientes:

1. $f(4)$ existe
2. $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = f(4) = 0$

92

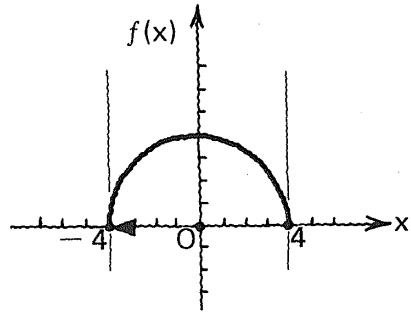
La función definida por

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

es/no es continua
por la derecha de -4,

porque

____



- es

1. $f(-4)$ existe
2. $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to -4^+} f(x) = f(-4) = 0$

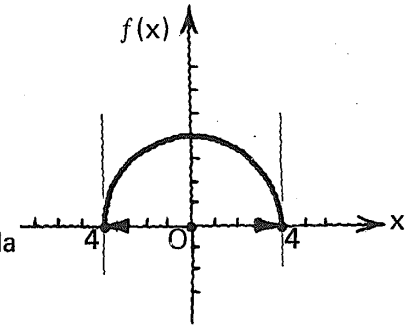
93

Atención.

Como la **función** definida por

$f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

1. es continua en el intervalo abierto $(-4, 4)$,
2. es continua por la derecha de -4, y
3. es continua por la izquierda de 4,



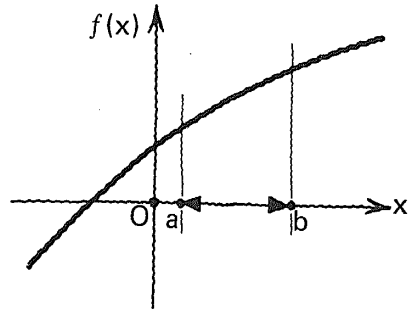
decimos que

• f es **continua en el intervalo cerrado** $[-4, 4]$

94

En general,
si para una **función** f
se cumplen estas 3
condiciones:

1. f es continua en el intervalo abierto (a, b),
2. f es continua por la derecha de a, y
3. f es continua por la izquierda de b,



decimos que

f es **continua en el intervalo cerrado** [a, b].*

*[a, b] ⊆ dominio de f.

95

Similarmente,

si para una función f
se cumplen estas 2
condiciones:

1. ┌──────────┐
2. ┌──────────┐

decimos que

f es continua en el intervalo semiabierto [a, b).*

* [a, b) ⊆ dominio de f.

f es continua en el intervalo abierto (a, b)

f es continua por la derecha de a

96

Si para una función f se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. ┌──────────┐
2. ┌──────────┐

decimos que

f es continua en el intervalo semiabierto (a, b].*

* (a, b] ⊆ dominio de f.

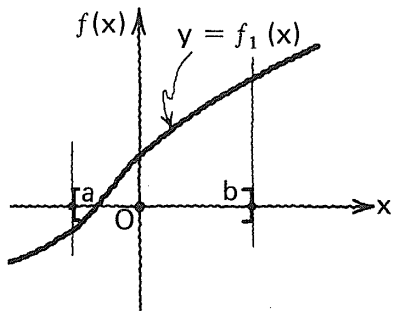
f es continua en el intervalo abierto (a, b)

f es continua por la izquierda de b

97

La función f_1, representada por la gráfica adjunta:

1. es continua por la derecha de **a** V/F
2. es continua por la izquierda de **b** V/F
3. es continua en el intervalo (a, b) V/F
4. es continua en el intervalo [a, b] V/F
5. es continua en el intervalo [a, b) V/F
6. es continua en el intervalo (a, b] V/F



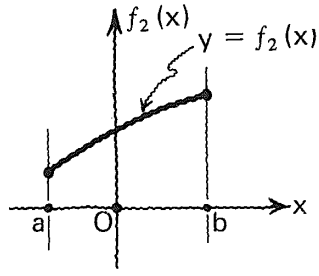
V
V
V
V
V
V

98

1. Se verifica [a, b] ⊆ dominio de f_2 V/F

La función f_2:

2. es continua en (a, b) V/F
3. es continua por la derecha de **a** V/F
4. es continua por la izquierda de **b** V/F
5. es continua en [a, b] V/F
6. es continua en [a, b) V/F
7. es continua en (a, b] V/F

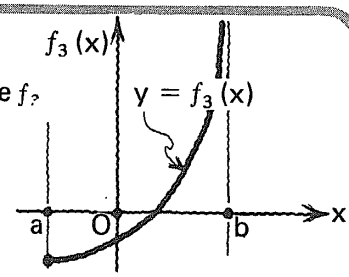


V

V
V
V
V
V
V

99

1. Se verifica [a, b] $\subseteq$ dominio de f_3 V/F



La función f_3 :

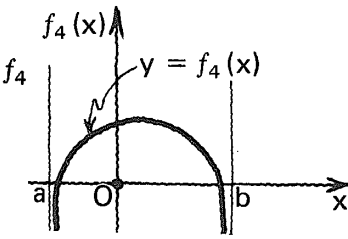
2. es continua en (a, b) V/F
3. es continua por la derecha de a V/F
4. es continua por la izquierda de b V/F
5. es continua en [a, b] V/F
6. es continua en [a, b) V/F
7. es continua en (a, b] V/F

F
(debemos entender que el dominio de f_3 no incluye a b)

V
V
F
F
V
F

100

1. Se verifica [a, b] $\subseteq$ dominio de f_4 V/F



La función f_4 :

2. es continua en (a, b) V/F
3. es continua por la derecha de a V/F
4. es continua por la izquierda de b V/F
5. es continua en [a, b] V/F
6. es continua en [a, b) V/F
7. es continua en (a, b] V/F

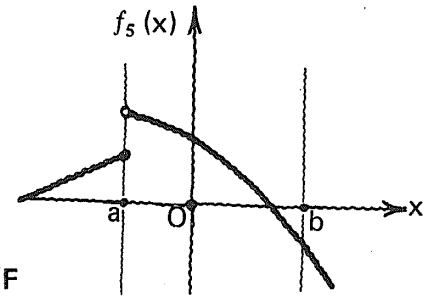
F

(el dominio de f_4 no incluye a a ni a b)

V
F
F
F
F
F

101

1. Se verifica [a, b] $\subseteq$ dominio de f_5 V/F



La función f_5 :

2. es continua en (a, b) V/F
3. es continua por la derecha de a V/F
4. es continua por la izquierda de b V/F
5. es continua en [a, b] V/F
6. es continua en [a, b) V/F
7. es continua en (a, b] V/F

V

V
F
V
F
F
V

7.3.3.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

102

Tenemos la función f
definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Vamos a investigar sus condiciones de continuidad.

103

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$$

Empezaremos por determinar:

dominio de f = [_____]

$f(x)$ está definida si y sólo si
$x^2 + x - 6 \geqslant 0$

Resolvemos para x la desigualdad:

$$x^2 + x - 6 \geqslant 0$$

o bien, factorizando el primer miembro:

$$(x+3)(x-2) \geqslant 0$$

$x + 3 \geqslant 0$ $\qquad$ $x + 3 \leqslant 0$

$x \geqslant -3$ $\qquad$ $x \leqslant -3$

$x - 2 \geqslant 0$ $\qquad$ $x - 2 \leqslant 0$

$x \geqslant 2$ $\qquad$ $x \leqslant 2$

$S_1 = [2, +\infty)$ $\qquad$ $S_2 = (-\infty, -3]$

$S = S_1 \cup S_2$

$(-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

104

$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Dominio de $f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

Tomemos el intervalo $(-\infty, -3]$.

¿Es f continua en $(-\infty, -3)$?

Sí/No

porque

- Sí.
- $f(a)$ existe para toda $a < -3$
  $\lim_{x \to a} f(x)$ existe para toda $a < -3$
  de acuerdo con TL8
  $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = \sqrt{a^2 + a - 6}$

105

$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Dominio de $f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

¿Es f continua por la izquierda de -3?

Sí/No

porque

- Sí
- $f(-3)$ existe

  $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ existe

  $\lim_{x \to -3^-} f(x) = f(-3) = 0$

106

$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Dominio de $f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

Mucha atención.

¿Es f continua por la derecha de $-\infty$?

Sí/No

porque

no tiene sentido afirmar que f es o no continua por la derecha de $-\infty$.

En primer lugar, $f(-\infty)$ carece de sentido.

107

$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

Dominio de $f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

¿Es f continua en $(-\infty, -3]$?

Sí/No

porque

[ ]

Sí.

f es continua en $(-\infty, -3)$

f es continua por la izquierda de -3

108

$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

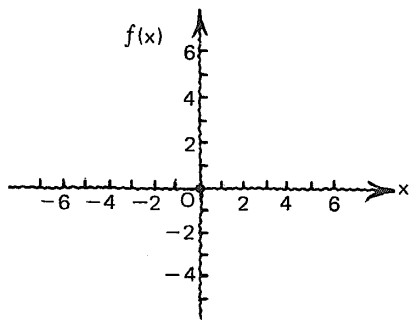
Dominio de $f = (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$

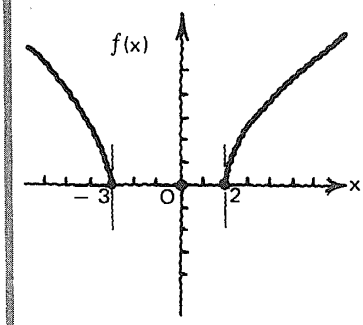
Considerando, ahora, el intervalo $[2, +\infty)$.

1. f es continua en $(2, +\infty)$ **V/F** — V
2. f es continua por la derecha de 2 **V/F** — V
3. f es continua por la izquierda de $+\infty$ **V/F** — no tiene sentido
4. f es continua en $[2, +\infty)$ **V/F** — V

109

Gráficamente.





f es continua en los intervalos $(-\infty, -3]$ y $[2, +\infty)$

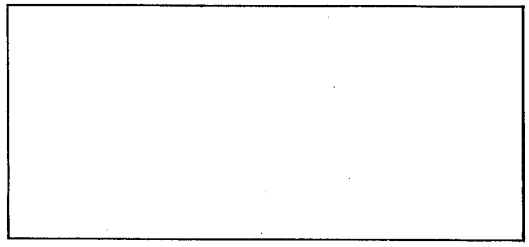
110

Queremos conocer
las condiciones de continuidad
de la función f definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 2}{5 - x}}$$

111

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 2}{5 - x}}$$



Dominio de $f =$ [ ]

$f(x)$ está definida si y sólo si

$$\frac{3x - 2}{5 - x} \geqslant 0$$

Resolvemos para x esta desigualdad

$$\frac{3x - 2}{5 - x} \geqslant 0$$

para	para
$5 - x > 0$	$5 - x < 0$
ó $x < 5$	ó $x > 5$
$3x - 2 \geqslant 0$	$3x - 2 \leqslant 0$
$3x \geqslant 2$	$3x \leqslant 2$
$x \geqslant {}^2/_3$	$x \leqslant {}^2/_3$
$S_1 = [{}^2/_3, 5)$	$S_2 = [\ ]$

$S = S_1 \cup S_2 = [{}^2/_3, 5)$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge {}^2/_3 \leqslant x < 5\}$ ó $[{}^2/_3, 5)$

112

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 2}{5 - x}}$$

Dominio de $f = [{}^2/_3, 5)$

¿Es f continua en $({}^2/_3, 5)$?

Sí/No

Sí

113

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 2}{5 - x}}$$

Dominio de $f = [\,^2/_3, 5)$

¿Es f continua por la derecha de $^2/_3$?

Sí/No

Sí

114

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 2}{5 - x}}$$

Dominio de $f = [\,^2/_3, 5)$

¿Es f continua por la izquierda de 5?

Sí/No

No

115

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x - 2}{5 - x}}$$

Dominio de $f = [\,^2/_3, 5)$

¿Es f continua en el intervalo $[\,^2/_3, 5]$?

Sí/No

No

116

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{5-x}}$$

Dominio de $f = [\frac{2}{3}, 5)$

¿Es f continua en el intervalo $[\frac{2}{3}, 5)$?

Sí/No

Sí

117

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{5-x}}$$

Dominio de $f = [\frac{2}{3}, 5)$

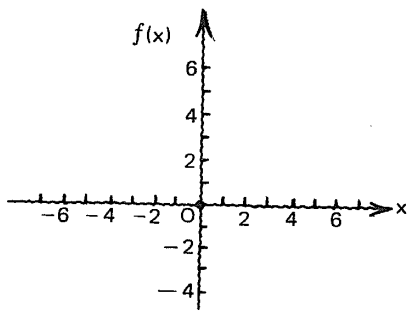
¿Es f continua en el intervalo $(\frac{2}{3}, 5]$?

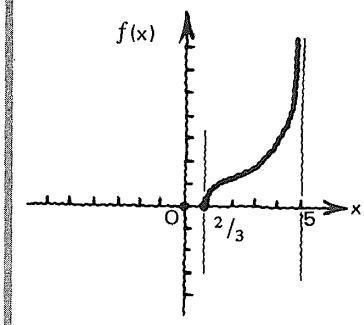
Sí/No

No

118

Gráficamente.





f es continua en $[\frac{2}{3}, 5)$

7.3.3.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *identificar* en un conjunto dado de funciones representadas por su gráfica cartesiana:

  1. las que son continuas en un cierto intervalo abierto (a, b);
  2. las que son continuas en un intervalo cerrado [a, b];
  3. las que son continuas en un intervalo semiabierto de alguna de las formas:

     [a, b) o (a, b];

- *determinar* si una función dada por su ecuación definitoria es o no continua en un intervalo cerrado incluido en su dominio.

3.4

Discontinuidad removible y discontinuidad esencial

119

Señalar la opción correcta.

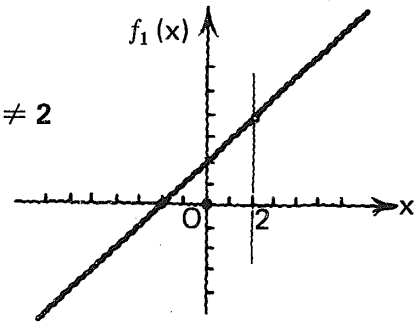
La función f_1 definida por

$$f_1(x) = x + 2 \quad \text{si } x \neq 2$$

es

continua/discontinua

en $x = 2$.



discontinua

120

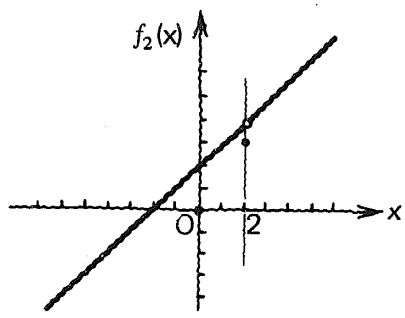
La función f_2 definida así:

$$f_2(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

es

continua/discontinua

en $x = 2$.



discontinua

121

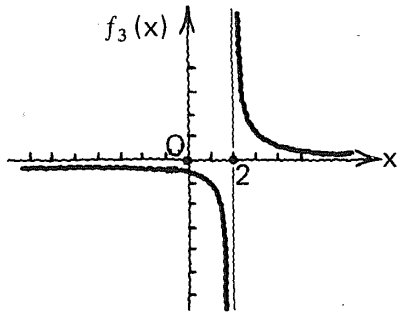
La función f_3 definida por

$$f_3(x) = \frac{1}{x-2}$$

es

continua/discontinua

en $x = 2$.



discontinua

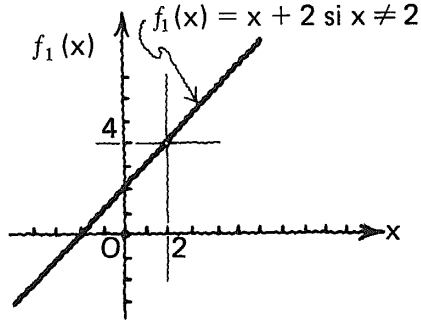
122

Para la función f_1 presentada en el cuadro 119, tenemos que

$f_1(2)$ no está definida

y

$\lim_{x \to 2} f_1(x) =$ [ ]



4

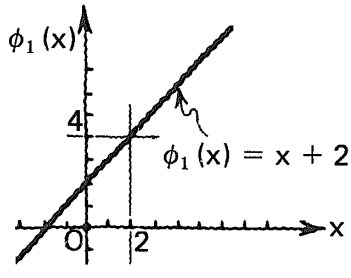
123

Ahora bien, si a partir de f_1 definimos la función ϕ_1 de manera que:

$\phi_1(2) = 4$

entonces, ϕ_1 es **continua/discontinua** en $x = 2$.

Hemos llenado el hueco existente en la gráfica de f_1 para $x = 2$, con el punto $(2, 4)$.



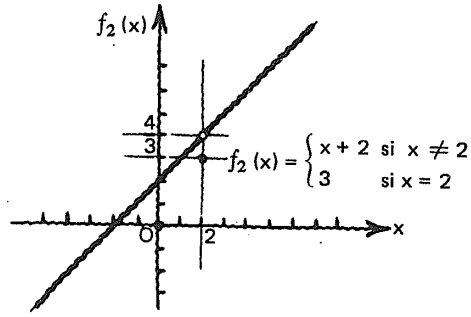
continua

124

Para la función f_2:
$f_2(2)$ está definida
pero

$\lim_{x \to 2} f_2(x) \neq f_2(2)$

$\square \neq \square$



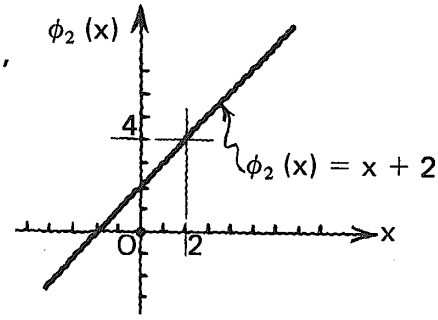
4 3

125

Si redefinimos a partir de f_2,
una función ϕ_2
tal que $\phi_2(2) = 4$,
esta nueva función es

continua/discontinua

en $x = 2$.



continua

126

Al tipo de discontinuidad
que se presenta para $x = 2$
en las funciones f_1 y f_2
se le llama:

discontinuidad removible o evitable.

127

La **discontinuidad removible o evitable** ocurre cuando:

- una función f es discontinua para cierto número a
- existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y
- $f(a)$ puede no existir o estar definida de modo que:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

Tal discontinuidad puede removerse o evitarse, redefiniendo $f(a)$ de manera que: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

128

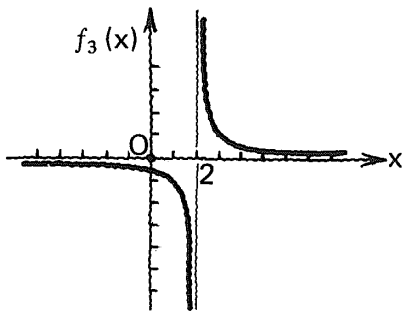
Cuando la discontinuidad en a no puede removerse o evitarse, mediante una redefinición de la función en a se le llama:

discontinuidad esencial.

129

Tal es el caso de la discontinuidad que ocurre en $x = 2$ para la función f_3 definida por:

$$f_3(x) = \frac{1}{x - 2}$$



130

Señalar la opción correcta.

La función f_4 definida por:

$f_4(x) = 3x^2 - 5$

- es continua en $x = -1$ Sí/No
- presenta discontinuidad en $x = -1$ { removible Sí/No ; esencial Sí/No }

Sí es continua

No

No

131

La función f_5 definida así:

$$f_5(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

- es continua en $x = 0$ Sí/No
- presenta discontinuidad en $x = 0$ { removible Sí/No ; esencial Sí/No }

No

Sí presenta discontinuidad removible

No

132

$$f_5(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{para } x \neq 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Redefinamos f_5 para que sea continua.

$\phi_5(x) =$ _____

$3x^2 - 5$ (para toda x)

133

f_6 está definida así:

$$f_6(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y en $x = 1$:

- es continua **Sí/No**
- presenta discontinuidad
  - removible **Sí/No**
  - esencial **Sí/No**

Sí es continua

No

No

134

f_7 está definida por:

$$f_7(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y para $x = 1$:

- es continua **Sí/No**
- presenta discontinuidad
  - removible **Sí/No**
  - esencial **Sí/No**

No

Sí presenta discontinuidad removible

No

135

$$f_7(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Intentemos dar dos formas de redefinir f_7 para que sea continua.

$\phi_7 =$ [ ]

o

$\phi_7 =$ [ ]

$$\begin{matrix} 3x^2 - 5 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3x^2 - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{matrix}$$

136

$$f_8(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

En x = 1:

f_8 { es continua **Sí/No**

presenta discontinuidad { removible **Sí/No**

esencial **Sí/No**

No
No

Sí presenta discontinuidad esencial

137

$$f_9(x) = \frac{1}{3x^2 - 5}$$

- f_9 es continua para toda x **Sí/No**

o

- f_9 presenta una discontinuidad { removible / esencial } en x = ⌊___⌋

f_9 presenta una discontinuidad esencial
en $x = \pm\sqrt{5/3}$

138

$$f_{10}(x) = \frac{(3x^2 - 5)(x - 2)}{x - 2}$$

f_{10} presenta una discontinuidad { removible / esencial } en x = ⌊___⌋

removible
2

139

$$f_{10}(x) = \frac{(3x^2 - 5)(x - 2)}{x - 2}$$

f_{10} redefinida para que sea continua para toda x:

$\phi_{10}(x) =$ [ ]

$3x^2 - 5$

7.3.4.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si una función dada por su ecuación o ecuaciones definitorias es continua o presenta discontinuidad removible o esencial en un número dado;
- *redefinir* una función que presenta discontinuidad removible en un número dado, para que sea continua.

3.5

Operaciones con funciones

140

Sean f y g dos funciones.

Podemos sumarlas, y obtener como resultado una nueva función que denotaremos por:

$$f + g$$

141

Por ejemplo:

si $\begin{cases} f \text{ está definida por } f(x) = x^2 \\ g \text{ está definida por } g(x) = 3x + 2 \end{cases}$

podemos escribir:

$f(x) + g(x) = (x^2) + (3x + 2) = x^2 + 3x + 2$

o

$(f + g)\, x = (x^2) + (3x + 2) = x^2 + 3x + 2$

142

Atención.

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = 3x + 2$

el dominio de $f =$ _____

el dominio de $g =$ _____

el dominio de $f + g =$ _____

$\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$

$\mathcal{R}$

143

Consideremos las dos funciones definidas, así:

$f(x) = 3x^3$

$g(x) = \frac{1}{x}$

Función suma:

_____

$(f+g)\ x = f(x) + g(x) = 3x^3 + \frac{1}{x}$

144

$f(x) = 3x^3$

$g(x) = \frac{1}{x}$

$(f + g)\ x = 3x^3 + \frac{1}{x}$

dominio de $f =$ _____

dominio de $g =$ _____

dominio de $(f + g) =$ _____

$\mathcal{R}$ o $(-\infty, +\infty)$

$\{x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq 0\}$
o $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$x/x \in \mathcal{R} \wedge x \neq 0\}$
o $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

145

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ dominio de f = ____

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ dominio de g = ____

$(f+g)\,x$ = ____

dominio de $f+g$ = ____

$\mathbb{R} - \{2\}$
o $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

$\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
o $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x^2-1}$

$\mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$
o $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$

146

Escribir en forma de intervalo

$f(x) = 3x$ dominio de f = ____

$g(x) = \sqrt{4-x^2}$ dominio de g = ____

Función suma: ____

dominio de $f+g$ = ____

$(-\infty, +\infty)$

$[-2, 2]$

$(f+g)x = 3x + \sqrt{4-x^2}$

$[-2, 2]$

147

Escribir en forma de intervalo

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ dominio de f = ____

$g(x) = \sqrt{6x-x^2}$ dominio de g = ____

Función suma: ____

Ver cuadro siguiente.

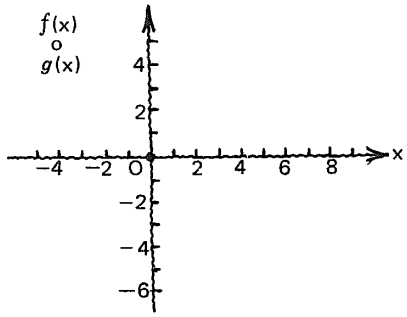
$[-2, 2]$

$[0, 6]$

$(f+g)\,x = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{6x-x^2}$

148

Antes de dar el dominio de $f + g$ tracemos las gráficas de f y de g en el mismo sistema cartesiano.



Respuesta en el cuadro siguiente

Observar con atención.

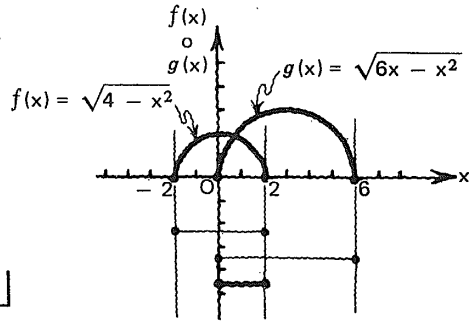
En el intervalo $[-2, 0)$ está definida f, pero no lo está g. En tal intervalo no está definida $f + g$.

En el intervalo $[0, 2]$

[ ]

En el intervalo $(2, 6]$

[ ]



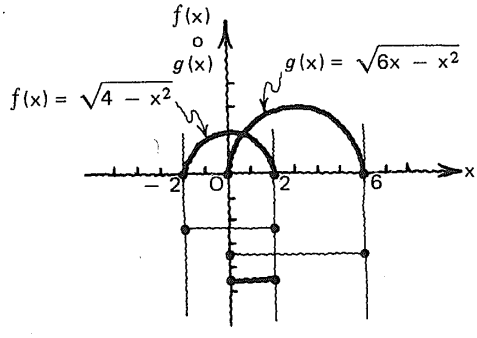
- están definidas ambas funciones f y g. En este intervalo está definida $f + g$.
- está definida g, pero no lo está f. En este intervalo no está definida $f + g$.

149

Entonces, el dominio de $f + g$ es el intervalo:

[ ]

en que ambas funciones están definidas.



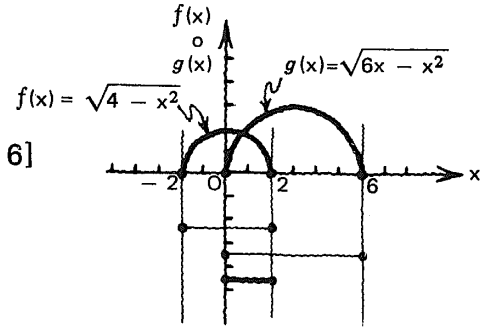
[0, 2]

150

Observamos que:

$[0, 2] = [-2, 2] \sqcup\!\sqcup [0, 6]$

Indicar el operador correspondiente.



151

En general,

Si f y g son dos funciones en x
con dominios D_f y D_g, respectivamente,
la **función suma** es una función cuya regla
de correspondencia es:

$(f + g)\,x = f(x) + g(x)$

y cuyo dominio es:

$D_{f+g} = D_f \cap D_g$

152

Mucha atención.

De manera similar, podemos definir:

Si f y g son dos funciones en x
con dominios D_f y D_g, respectivamente,
la **función diferencia** es una función cuya
regla de correspondencia es: $(f - g)x = f(x) - g(x)$

y cuyo dominio es: $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

153

También:

Si f y g son dos funciones en x
con dominios Df y Dg, respectivamente,
la **función producto** es una función cuya
regla de correspondencia es: [ ]

y cuyo dominio es: [ ]

$(f \cdot g)\, x = f(x) \cdot g(x)$

$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$

154

Y también:

Si f y g son dos funciones en x
con dominios D_f y D_g, respectivamente,
la **función cociente** es una función cuya
regla de correspondencia es: [ ]

y cuyo dominio es: [ ]

sin olvidar la restricción: [ ]

$(f/g)\, x = \frac{f(x)}{g(x)}$

$D_{f/g} = D_f \cap D_g$

$g(x)$ debe ser diferente de cero.

155

Escribir como intervalos

$f(x) = \sqrt{x+1}$ $\quad D_f =$ [ ]

$g(x) = \sqrt{x-1}$ $\quad Dg =$ [ ]

$(f-g)\, x =$ [ ]

$D_{f-g} =$ [ ]

$[-1, +\infty)$

$[1, +\infty)$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

$[1, +\infty)$

156

Escribir en forma de intervalo

$f(x) = x^2 - 3$ $\quad D_f = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ $\quad Dg = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$(f \cdot g)\, x = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$D_{f \cdot g} = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$(-\infty, +\infty)$

$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

$(x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 2x - 3}$

$(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

157

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ $\quad D_f = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ $\quad D_g = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

$(f/g)\, x = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$ $\quad D_{f/g} = \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

Restricción $\lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

Observar con atención.

$(-\infty, +\infty)$

$(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - x}}$
- $Df/g = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

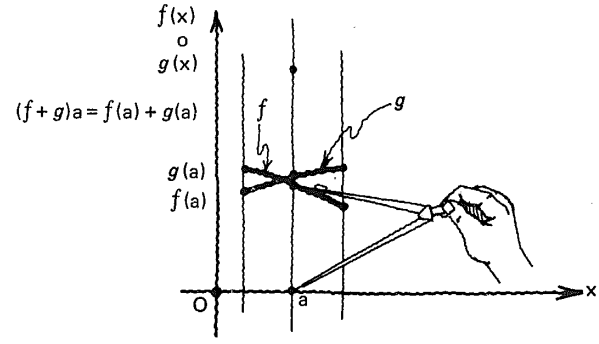
$\sqrt{x^2 - x} \neq 0$

7.3.5.1

Práctica adicional de determinación de la regla de correspondencia y el dominio de una suma, una diferencia, un producto o un cociente de funciones dadas, si se considera necesario.

158

Para trazar la gráfica correspondiente a $f + g$, podemos **sumar las ordenadas** de las gráficas de f y de g para cada x en el dominio de $f + g$.



159

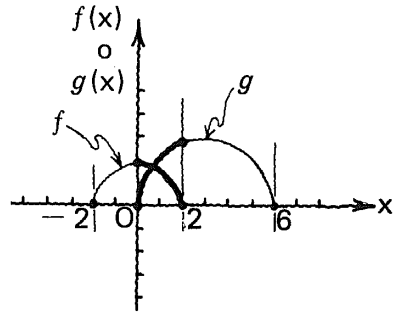
Por ejemplo:

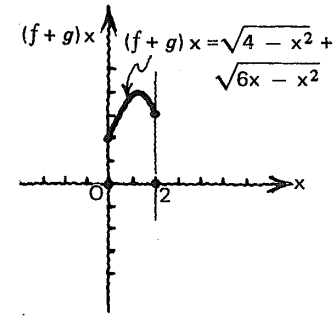
trazar la gráfica correspondiente a $f + g$ en que

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

y

$g(x) = \sqrt{6x - x^2}$





160

De manera análoga podemos obtener las gráficas de $f - g$, $f \cdot g$ o f/g, por diferencia, producto o cociente de las ordenadas de f y de g, para cada abscisa en el dominio de $f - g$, $f \cdot g$ o f/g.

7.3.5.2

Práctica adicional de
trazo de la gráfica correspondiente
a una función suma, diferencia,
producto o cociente,
si se considera necesario.

161

Ahora,
consideremos la función definida por $y = \sqrt{16 - x^2}$

Pues bien,
si hacemos $u = 16 - x^2$

podemos escribir $y = \sqrt{u}$

162

Atención.

$y = \sqrt{16 - x^2}$

$u = 16 - x^2$

$y = \sqrt{u}$

Ahora bien:

Si $\sqrt{u} = f(u)$ y $u = 16 - x^2 = g(x)$
podemos escribir:

$y = f(u)$ o bien: $y = f[g(x)] = \sqrt{g(x)}$

163

$f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{16 - x^2}$

Este es un ejemplo
de lo que llamamos
función compuesta
o
función de función.

164

Es decir que:

si f y g son dos funciones, definidas así $\longrightarrow$ $\begin{cases} f(u) = \sqrt{u} \\ u = g(x) = 16 - x^2 \end{cases}$

podemos definir la función compuesta:

$f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{16 - x^2}$

165

Podemos interpretar
esto como una
operación binaria
que llamamos
composición de
funciones
y simbolizamos así:

$f \circ g$.

$f(u) = \sqrt{u}$

$\downarrow$

$g(x) = 16 - x^2$

$\downarrow$

$f \circ g = f[g(x)] = \sqrt{16 - x^2}$

166

Ahora,
recordemos que la expresión $f(x)$
representa la
imagen del elemento x del dominio.

167

En $f(x) = x + 5$

f "pide *sumar 5 a lo que está dentro del paréntesis*",
por lo tanto:

- $f(1) =$ ____ $=$ ____
- $f(0) =$ ____ $=$ ____
- $f(-1) =$ ____ $=$ ____

expresión simplificada

$1 + 5 = 6$
$0 + 5 = 5$
$-1 + 5 = 4$

168

$f(x) = x + 5$

$f(5) =$ ____ $=$ ____
$f(a) =$ ____
$f(*) =$ ____
$f(◎) =$ ____

$5 + 5 = 10$
$a + 5$
$* + 5$
$◎ + 5$

169

$f(x) = x + 5$

$f(n + 1) =$ ____ $=$ ____

$f(n^2 + 3n - 2) =$ ____ $=$ ____

$f\left(\sqrt{n^2 - 4}\right) =$ ____

$f(\text{sen } 3n) =$ ____

$f[\log (n^2 + 1)] =$ ____

$n + 1 + 5 = n + 6$

$n^2 + 3n - 2 + 5 = n^2 + 3n + 3$

$\sqrt{n^2 - 4} + 5$

$(\text{sen } 3n) + 5$

$\log(n^2 + 1) + 5$

170

$f(x) = x + 5$

$f\left(\frac{1}{n}\right) =$ ____

↓

$f[g(n)] =$ ____

$\frac{1}{n} + 5$

$g(n) + 5$

171

En $f(x) = 3x - 1$

f "pide ____

Por ejemplo:

$f(k) =$ ____

$f(w^2 + 3w) =$ ____ $=$ ____

$f[g(w)] =$ ____ $=$ ____

multiplicar por 3 lo que está dentro del paréntesis y *restar 1 al producto obtenido*

$3k - 1$

$3(w^2 + 3w) - 1 = 3w^2 + 9w - 1$

$3[g(w)] - 1$

172

En $f(x) = \frac{x^2}{4}$

f "pide [ ]

De modo que:

$f(z + 5) =$ [ ]

$f(\sqrt{z^3 + 8}) =$ [ ]

$f[h(z)] =$ [ ]

elevar al cuadrado lo que está dentro del paréntesis y dividir el resultado entre 4

$\frac{(z+5)^2}{4}$

$\frac{(\sqrt{z^3+8})^2}{4}$

$\frac{[h(z)]^2}{4}$

7.3.5.3

Práctica adicional,
si se considera necesario.

173

$f(u) = \sqrt{u}$

f "pide [ ]

Entonces

$f[g(x)] =$ [ ]

$f(16 - x^2) =$ [ ]

extraer la raíz cuadrada de lo que está dentro del paréntesis

$\sqrt{g(x)}$

$\sqrt{16 - x^2}$

174

Si $f(u) = \sqrt{u}$

y $g(x) = 16 - x^2$

podemos definir la función compuesta f ∘ g, así:

$(f \circ g)\, x = f[g(x)] = f(16 - x^2) = \sqrt{16 - x^2}$

175

Atención.

$f(u) = \sqrt{u}$ $\quad g(x) = 16 - x^2$

$(f \circ g)\, x = f[g(x)] = f(16 - x^2) = \sqrt{16 - x^2}$

Ahora,
hagamos el intento de definir $g \circ f$:

$(g \circ f)\, u =$ _____

g "pide _____

$g[f(u)] = g(\sqrt{u}) = 16 - (\sqrt{u})^2 =$
$= 16 - u$

restar de 16 el cuadrado de lo que está dentro del paréntesis

176

$f(u) = u^2$

$g(x) = x - 2$

$(f \circ g)\, x =$ _____

$(g \circ f)\, u =$ _____

$f[g(x)] = f(x - 2) = (x - 2)^2$

$g[f(u)] = g(u^2) = u^2 - 2$

177

$f(u) = \sqrt{u + 1}$

$g(x) = x^2$

$(f \circ g)\, x =$ _____

$(g \circ f)\, u =$ _____

$f[g(x)] = f(x^2) = \sqrt{x^2 + 1}$

$g[f(u)] = g\left(\sqrt{u+1}\right) = \left(\sqrt{u+1}\right)^2$

$= u + 1$

178

$f(u) = \sqrt[3]{u^2}$

$g(x) = 3x + 4$

$(f \circ g)\, x =$ _____

$(g \circ f)\, u =$ _____

$f[g(x)] = f(3x + 4) = \sqrt[3]{(3x+4)^2}$

$g[f(u)] = g\sqrt[3]{u^2} = 3\sqrt[3]{u^2} + 4$

179

$f(u) = 3u^2 - 2u + 1$

$g(x) = \dfrac{x + 1}{2}$

$(f \circ g)\, x =$ _____

$(g \circ f)\, u =$ _____

$f[g(x)] = f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$

$= 3\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x+1}{2}\right) + 1$

$g[f(u)] = g(3u^2 - 2u + 1)$

$= \dfrac{3u^2 - 2u + 2}{2}$

7.3.5.4

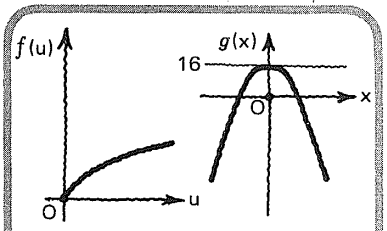
Práctica adicional,
si se considera necesario.

180

Sean las funciones f y g definidas como sigue y determinemos sus correspondientes dominios y rangos.

$f(u) = \sqrt{u}$ $\quad \begin{cases} Df = \_\_\_\_ \\ Rf = \_\_\_\_ \end{cases}$

$g(x) = 16 - x^2$ $\quad \begin{cases} Dg = \_\_\_\_ \\ Rg \quad \_\_\_\_ \end{cases}$



- $\{u/u \in \mathcal{R} \wedge u \geqslant 0\}$ o $[0, +\infty)$
- $\{f(u)/f(u) \in \mathcal{R} \wedge f(u) \geqslant 0\}$ o $[0, +\infty)$
- $\{x/x \in \mathcal{R}\}$ o $(-\infty, +\infty)$
- $\{g(x)/g(x) \in \mathcal{R} \wedge g(x) \leqslant 16\}$ o $(-\infty, 16]$

181

Atención.

$f(u) = \sqrt{u}$ $\quad \begin{cases} Df = \{u/u \in \mathcal{R} \wedge u \geqslant 0\} \\ Rf = \{f(u)/f(u) \in \mathcal{R} \wedge f(u) \geqslant 0\} \end{cases}$

$g(x) = 16 - x^2$ $\quad \begin{cases} Dg = \{x/x \in \mathcal{R}\} \\ Rg = \{g(x)/g(x) \in \mathcal{R} \wedge g(x) \leqslant 16\} \end{cases}$

$(f \circ g)x = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{16 - x^2}$

El dominio de $f \circ g$ deberá ser el conjunto de todas las x, tales que $g(x) \geqslant 0$, o sea: $D_{f \circ g} = \_\_\_\_$

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención.

$g(x) \geqslant 0$

es equivalente a:

$16 - x^2 \geqslant 0$

resolvemos esta desigualdad para x:

$16 - x^2 \geqslant 0$

$(4 + x)(4 - x) \geqslant 0$

$4 + x \geqslant 0$	$4 + x \leqslant 0$
$x \geqslant -4$	$x \leqslant -4$
$4 - x \geqslant 0$	$4 - x \leqslant 0$
$x \leqslant 4$	$x \geqslant 4$
$S_1 = [-4, 4]$	$S_2 = [\ ]$

$S = S_1 \cup S_2 = [-4, 4]$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge -4 \leqslant x \leqslant 4\}$

182

Observamos que:

el rango de g: $(-\infty, 16]$
debe ser restringido a: [ ]

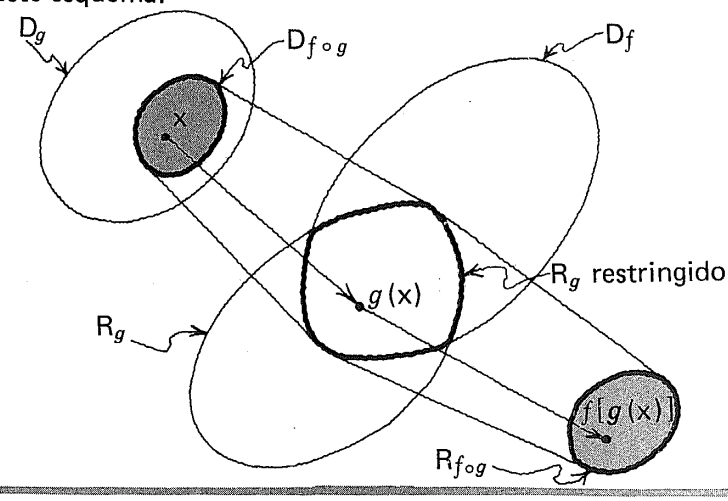
al efectuarse la composición $f \circ g$.

[0, 16]

183

Estudiar con mucha atención este esquema.

El dominio de $f \circ g$ está constituido por los elementos x de D_g cuyas imágenes $g(x)$ pertenecen a D_f.



184

$f(u) = \sqrt{u}$

$$\begin{cases} D_f = \{u/u \in \mathcal{R} > u \geqslant 0\} \\ R_f = \{f(u)/f(u) \in \mathcal{R} \wedge f(u) \geqslant 0\} \end{cases}$$

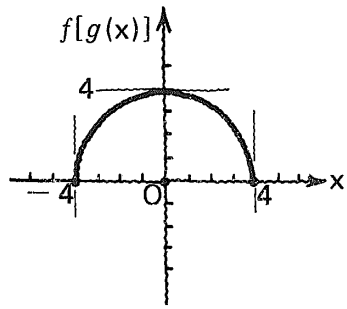
$g(x) = 16 - x^2$

$$\begin{cases} D_g = \{x/x \in \mathcal{R}\} \\ R_g = \{g(x)/g(x) \in \mathcal{R} \wedge g(x) \leqslant 16\} \end{cases}$$

$(f \circ g)\, x = f[g(x)] = \sqrt{16 - x^2}$

$D_{f \circ g} = \{x/x \in \mathcal{R} \wedge -4 \leqslant x \leqslant 4\}$

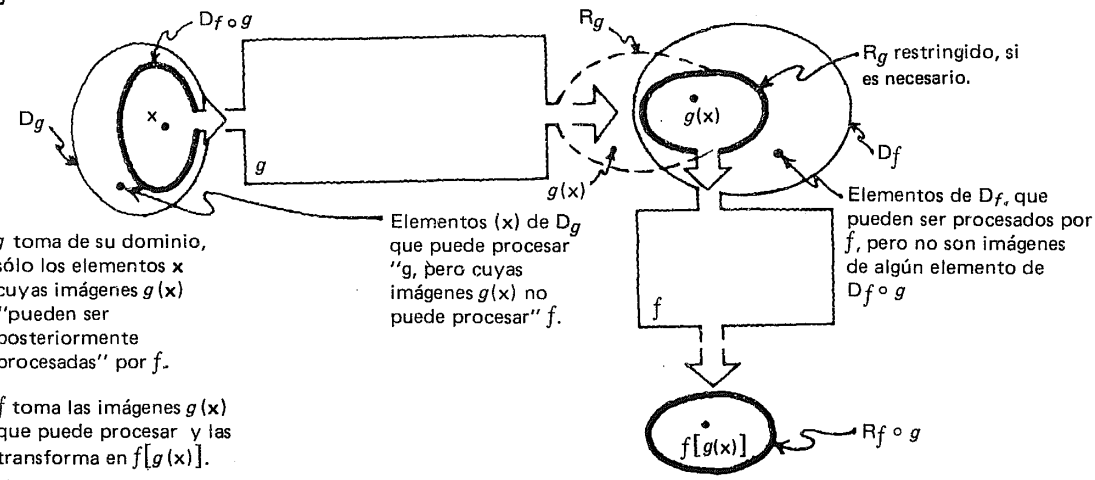
$R_{f \circ g} =$ [ ]



$\{(f \circ g)\, x/(f \circ g)\, x \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant (f \circ g)\, x \leqslant 4\}$

185

Estudiemos con atención este esquema.



- g toma de su dominio, sólo los elementos **x** cuyas imágenes $g(x)$ "pueden ser posteriormente procesadas" por f.
- f toma las imágenes $g(x)$ que puede procesar y las transforma en $f[g(x)]$.

186

Veamos esto más claramente
con dos funciones con dominios finitos.

$f = \{(0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5)\}$

$D_f =$ [ ]

$\{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$

$R_f =$ [ ]

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$g = \{(-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20)\}$

$D_g =$ [ ]

$\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

$R_g =$ [ ]

$\{-20, 0, 12, 16\}$

187

$g = \{(-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20)\}$

$g(-6)$

$D_g = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

$R_g = \{-20, 0, 12, 16\}$

g toma un elemento (x) de su dominio y lo transforma en su imagen $g(x)$.

Así:

$g(-6) =$ ____ $g(0) =$ ____ $g(4) =$ ____

$g(-4) =$ ____ $g(2) =$ ____ $g(6) =$ ____

$g(-2) =$ ____

x $g(x)$ x $g(x)$ x $g(x)$

-20

$0 \quad 16 \quad 0$

$12 \quad 12 \quad -20$

188

Atención.

$f = \{(0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5)\}$

$g = \{(-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20)\}$

$R_g = \{-20, 0, 12, 16\}$

De estos elementos $g(x)$ que constituyen el rango de g (es decir: R_g) sólo pueden "ser procesados por" f, los siguientes:

____

0, 16

189

$g(x), f[g(x)]$

$f = \{(0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5)\}$

$g = \{(-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20)\}$

- g toma a -4 y lo transforma en **0**
- f toma a **0** y lo transforma en **0**.
- g toma a **0** y lo transforma en ____
- f toma a ____ y lo transforma en ____

16

16 4

190

$f = \{ (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5) \}$

$g = \{(-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20)\}$

Podemos observar que:

1
- g puede procesar, por ejemplo, a -6, transformándolo en ⌊⌋ pero
- f no puede procesar esta imagen de -6, porque ⌊⌋

2
- f puede procesar, por ejemplo, a 4 transformándolo en ⌊⌋ pero
- 4 no es imagen de algún elemento de g

-20

no está en su dominio

2

191

$f = \{ (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5) \}$

$g = \{ (-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20) \}$

$f \circ g$ estará formada por los pares ordenados:

⌊⌋ y ⌊⌋

Es decir,

$f \circ g =$ ⌊⌋

$(-4, 0)$ $(0, 4)$

$(-4, 0), (0, 4)$

192

$f = \{ (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5) \}$

$g = \{ (-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20) \}$

$f \circ g = \{(-4, 0), (0, 4)\}$

Ahora podemos observar con más claridad, que:

- el dominio de $f \circ g$ está constituido por los elementos x del dominio de g, cuyas imágenes $g(x)$ pertenecen al dominio de f
- el rango de $f \circ g =$ ⌊⌋

$\{0, 4\}$

193

Ahora bien.

$f = \{ (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5) \}$

$g = \{ (-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20) \}$

$g \circ f =$ [ ]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$f = \{ (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5) \}$

$g = \{ (-6, -20), (-4, 0), (-2, 12), (0, 16), (2, 12), (4, 0), (6, -20) \}$

$g \circ f = \{ (0, 16), (4, 12), (16, 0) \}$

Observamos que
el dominio de $g \circ f$ está constituido por

[ ]

$g \circ f$

los elementos del dominio de f, cuyas imágenes están en el dominio de g

194

Regresemos a nuestras conocidas funciones:

$f(u) = \sqrt{u}$
$g(x) = 16 - x^2$ } *

Hemos encontrado que:

$f \circ g = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{16 - x^2}$

Ahora:

$g \circ f =$ [ ]

* Las dos funciones pueden ser expresadas en términos de la misma variable, por ejemplo, x.

$g[f(u)] = g(\sqrt{u}) = 16 - (\sqrt{u})^2$

$= 16 - u$

siempre que $u \geqslant 0$

195

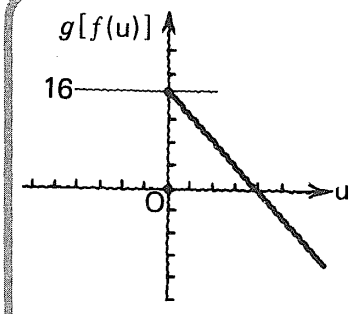
$f(u) = \sqrt{u}$ $\quad g(x) = 16 - x^2$

$(f \circ g)\, x = \sqrt{16 - x^2}$

$(g \circ f)\, u = 16 - u \quad$ si $u \geqslant 0$

$D_{g \circ f} =$ [ ]

$R_{g \circ f} =$ [ ]



$\{u/u \in \mathcal{R} \wedge u \geqslant 0\}$

$\{g[f(u)]/g[f(u)] \in \mathcal{R} \wedge g[f(u)] \leqslant 16\}$

7.3.5.5

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* la regla de correspondencia y el dominio de una suma, una diferencia, un producto o un cociente de funciones;
- *trazar* la gráfica cartesiana de una función suma, diferencia, producto o cociente;
- *dar* la regla de correspondencia, el dominio y el rango de una función compuesta.

3.6

Continuidad de una función suma, diferencia, producto, cociente o composición

196

Los siguientes teoremas nos ayudarán a determinar las condiciones de continuidad de una

- suma
- diferencia
- producto
- cociente o
- composición

de funciones.

197

Si f y g son dos funciones continuas en **a**, entonces:

TC_3. $f + g$
TC_4. $f - g$
TC_5. $f \cdot g$

} son continuas en **a**

TC_6. f / g es continua en **a**, siempre que g (a) $\neq 0$

198

TC_7. Si f y g son dos funciones tales que:

- g es continua en **a**

  y
- f es continua en g(**a**),

  entonces
- $f \circ g$ es continua en **a**

199

$f_1(x) = 3x$ con dominio [ ]

$f_2(x) = \sqrt{x}$ con dominio [ ]

f_1 es continua en $x = 2$ V/F

f_2 es continua en $x = 2$ V/F

Entonces, de acuerdo con C_3:

$(f_1 + f_2)\,x =$ [ ]

con dominio [ ]

[ ]

$\mathbb{R}$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$

V

V

$3x + \sqrt{x}$

$\{x/x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$

es continua en $x = 2$

200

En efecto,
puesto que 2 está en el dominio de $f_1 + f_2$, se verifica la primera condición para que una función sea continua en un número, es decir:

1. [ ]

$f(2)$ existe

201

$(f_1 + f_2)\,x = 3x + \sqrt{x}$

De acuerdo con los teoremas de límites estudiados en el módulo anterior:

2. $\lim_{x \to 2} 3x + \sqrt{x}$ { existe / no existe }

existe

202

$(f_1 + f_2)\,x = 3x + \sqrt{x}$

Como

$(f_1 + f_2)\,(2) =$ [ ]

$\lim_{x \to 2} (f_1 + f_2) =$ [ ]

se verifica/no se verifica la tercera condición:

3. [ ]

$6 + \sqrt{2}$

$6 + \sqrt{2}$

se verifica

$\lim_{x \to 2}(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(2)$

203

Sean las dos funciones f y g definidas así:

$f(x) = \sqrt{x - 1}$

$g(x) = x^2$

¿Es g continua en $x = 2$? **Sí/No**

¿Es f continua en $g(2) =$ [ ] ? **Sí/No**

Sí

4 Sí

204

$f(x) = \sqrt{x - 1}$

$g(x) = x^2$

Puesto que: g es continua en 2
y f es continua en $g(2)$
podemos concluir, de acuerdo con C_7, que:

$f \circ g$ definida por [ ]

es continua en [ ]

$(f \circ g)\ x = f[g(x)] = \sqrt{g(x) - 1}$

$= \sqrt{x^2 - 1}$

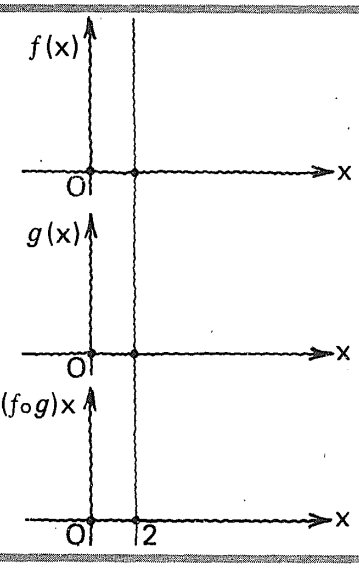
2

205

Gráfica de f ➡

Gráfica de g ➡

Gráfica de $f \circ g$ ➡

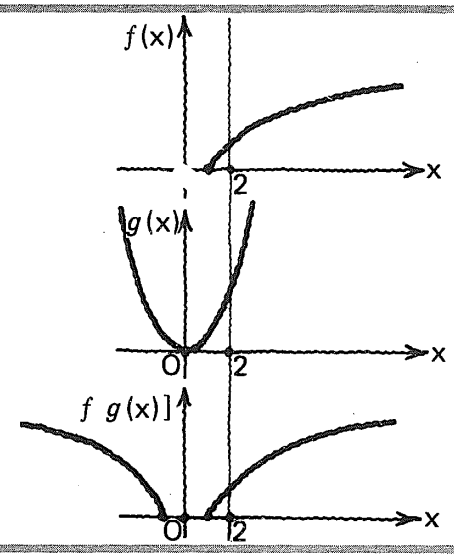


Respuesta
en el
cuadro siguiente

Gráfica de f ➡

Gráfica de g ➡

Gráfica de $f \circ g$ ➡



7.3.6.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

7.3.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *investigar* las condiciones de continuidad en un número para una función suma, diferencia, producto, cociente o composición.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 2 de enero de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO REG KC 100